

Übung 3

Ausgabe: 01.10.2025 (im Internet)

Abgabe: 08.10.2025 (via E-Mail an Ihren Assistenten)

Ziel dieser Übung ist es, dass Sie

- Ihr Verständnis von anziehenden Kräften weiterentwickeln, insbesondere von der Zentripetalkraft, der Gravitationskraft und der elektrostatischen Kraft (Aufgabe 1),
- das Konzept des Drehimpulses auf atomarer Ebene anwenden können und dessen Quantisierung kennenlernen (Aufgabe 1),
- sich vertraut machen mit dem Kernspindrehimpuls (Aufgabe 2).
- den Ursprung des Massendefektes kennen und das Konzept des Massendefektes auf Beispiele anwenden können (Aufgabe 3).

Aufgabe 1: Drehimpuls

Im Bohrschen Atommodell des Wasserstoffatoms bewegt sich das Elektron ($m_e = 9.109\,38 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$) auf einer Kreisbahn um das Proton ($m_p = 1.672\,62 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$), wobei sich das deutlich schwerere Proton im Zentrum der Kreisbahn befindet. Beide Teilchen werden als Punktteilchen betrachtet. Des Weiteren wird angenommen, dass das Proton im Ursprung des Koordinatensystems fixiert ist. Die Gravitationskonstante beträgt $G = 6.674\,30 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ und die Elementarladung $e = 1.602\,18 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

- a) Geben Sie die Formeln zur Berechnung der Gravitationskraft und der elektrostatischen Kraft (auch Coulomb-Kraft) zwischen einem Elektron und einem Proton an und bestimmen Sie numerische Werte für den Fall, dass der Abstand zwischen den beiden Teilchen $a_0 = 0.529 \text{ Å}$ beträgt. Berechnen Sie, wie gross die Masse des Protons sein müsste, damit die Kräfte denselben Betrag haben.

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad |F_C| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

- b) Berechnen Sie die Umlaufzeit des Elektrons auf seiner Kreisbahn um das Proton.

$$F_{zP} = \frac{mv^2}{r} \quad F_{zP} \stackrel{!}{=} F_C$$

- c) Wie gross ist der (klassische) Drehimpuls des Elektrons in dieser Kreisbewegung?

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| |\vec{p}| \sin(\varphi)$$

Ein gebundenes Elektron kann in der Realität nur bestimmte, diskrete Energien annehmen und somit nur diskrete (mittlere) Radien bzw. Drehimpulse aufweisen. Dieses Phänomen wird als Quantisierung bezeichnet und im Verlauf der Vorlesung besprochen (siehe Kapitel 4.3 des Skriptes).

- d) Gegeben die Formel $r_n = n^2 a_0 = n^2 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / m_e e^2$ für den Radius der n -ten möglichen Kreisbahn für ein Elektron, berechnen Sie den Betrag des Drehimpuls als Funktion von n .

r_n in vorher ermittelte Formel für $|\vec{L}|$ einsetzen

- e) Leiten Sie den Ausdruck für die klassische Rotationsenergie des Elektrons auf der n -ten Kreisbahn (ausgedrückt mit a_0) her.

$$E_{\text{rot}} = \frac{L^2}{2I}$$

$$I = mr^2 \text{ für Punktteilchen}$$

Hinweis: Die physikalischen Formeln zur Beschreibung von Rotationsbewegungen entsprechen in ihrer Form exakt den Gleichungen zur Beschreibung von Translationsbewegungen (geradliniger Bewegungen). Für Rotationsbewegungen wird anstelle der Strecke ein Winkel (in rad) und anstelle der Masse das Trägheitsmoment verwendet. Das Trägheitsmoment quantifiziert den Widerstand, den ein (starrer) Körper gegen eine Änderung seiner Winkelgeschwindigkeit aufweist. In gleicher Weise quantifiziert die Masse den Widerstand gegen eine Änderung der Geschwindigkeit.

In der folgenden Tabelle finden Sie eine Gegenüberstellung von Rotations- und Translationsgrößen:

Translationsgröße	Sym.	Formel	Rotationsgröße	Sym.	Formel
Zeit	t		Zeit	t	
Masse	m		Trägheitsmoment	I	
Strecke	s		Winkel (in rad)	(z.B.) φ	
Geschwindigkeit	v	$v = \frac{ds}{dt}$	Winkelgeschw.	ω	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Beschleunigung	a	$a = \frac{dv}{dt}$	Winkelbeschl.	$\dot{\omega}$	$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$
Impuls	p	$p = m \cdot v$	Drehimpuls	L	$L = I \cdot \omega$
Kraft	F	$F = m \cdot a = \frac{dp}{dt}$	Drehmoment	M	$M = I \cdot \dot{\omega} = \frac{dL}{dt}$
kinetische Energie	$E_{\text{kin}}(\text{o. } T)$	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$	kinetische Energie	E_{rot}	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$

Die folgende Tabelle verbindet die Rotationsgrößen einer Punktmasse mit den Translationsgrößen dieser Masse. Die Masse bewegt sich an der Position $\vec{R}$ auf einer Kreisbahn um den Ursprung mit dem Radius R . Im eindimensionalen Fall sind die Größen nicht vektoriell und die Kreuzprodukte können als gewöhnliche Multiplikation aufgefasst werden.

Translationsgröße	Rotationsgröße	Verbindungsformel
m	I	$I = m \cdot R^2$ (Punktmasse)
s	φ	$s = \varphi \cdot R$
Bahngeschw. $\vec{v}_B$	$\vec{\omega}$	$\vec{\omega} = \vec{R} \times \vec{v}_B \quad \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{R}$
Bahnbeschl. $\vec{a}_B$	$\dot{\vec{\omega}}$	$\dot{\vec{\omega}} = \vec{R} \times \vec{a}_B \quad \vec{a}_B = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R}$
$\vec{p}$	$\vec{L}$	$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p} \quad \vec{p} = \vec{L} \times \vec{R}$
$\vec{F}$	$\vec{M}$	$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F} \quad \vec{F} = \vec{M} \times \vec{R}$
E_{kin}	E_{rot}	$E_{\text{kin}} = E_{\text{rot}}$

Aufgabe 2: Kernspindrehimpuls

Der Kernspin $\vec{I}$ (intrinsischer Drehimpuls) eines Atomkerns wird durch die Kernspindrehimpulsquantenzahl I charakterisiert. Dabei lassen sich die Norm (Betrag) des Kernspins $|\vec{I}|$ und seine z -Komponente I_z auf die gleiche Art wie beim Spin $\vec{S}$ von Elementarteilchen bestimmen. Es gilt $|\vec{I}| = \hbar\sqrt{I(I+1)}$ und $I_z = \hbar M_I$, wobei M_I die magnetische Kernspindrehimpulsquantenzahl und $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1.054\,57 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ die reduzierte Planck-Konstante ist.

Die natürliche Isotopenverteilung von B, Cl, Na und I ist in Tabelle 2.1 gegeben.

Tabelle 2.1: Natürliche Isotopenverteilungen von B, Cl, Na und I.

B:	^{10}B	19.9(7)%
	^{11}B	80.1(7)%
Cl:	^{35}Cl	75.76(10)%
	^{37}Cl	24.24(10)%
Na:	^{23}Na	100%
I:	^{127}I	100%

- a) Wie lauten die Kernspindrehimpulsquantenzahlen der auf der Erde natürlich vorkommenden Isotope von Bor (B), Chlor (Cl), Natrium (Na) und Iod (I)? Wodurch zeichnen sich Natrium und Iod bezüglich ihrer Isotopenverteilung aus?

Googlen

Hinweis: Es gibt keine Möglichkeit, die Kernspindrehimpulsquantenzahlen I anhand der Anzahl Protonen und Neutronen zu berechnen. Sie müssen diese daher recherchieren.

- b) Welchen Betrag hat der Kernspindrehimpulsvektor der unter a) behandelten Isotope? Geben Sie Ihr Resultat in SI-Einheiten an.

$$|\vec{I}| = \hbar \sqrt{I(I+1)}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1.054571817 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

- c) Notieren Sie alle möglichen Werte der magnetischen Kernspindrehimpulsquantenzahl M_I für die Isotope und bestimmen Sie eine Gleichung, die angibt, wie viele unterschiedliche Zustände $\{I, M_I\}$ für einen gegebenen Wert von I existieren.

$$M_I = -I, (-I+1), \dots, I-1, I$$

$$\text{Bsp.: } I=1 \quad M_I = -1, 0, 1 \Rightarrow 3 \text{ Zustände}$$

$$|I, M_I\rangle : |1, -1\rangle \quad |1, 0\rangle \quad |1, 1\rangle$$

Aufgabe 3: Der Massendefekt

Laut der speziellen Relativitätstheorie existiert eine Äquivalenz zwischen Masse m und Energie E durch die Relation

$$E = mc_0^2, \quad (3.1)$$

wobei hier c_0 die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit mit dem Wert 299 792 458 m/s beschreibt.

Verwenden Sie in dieser Aufgabe die nachfolgenden Werte:

- $1 \text{ u} = 1.660\,539\,068\,92 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- $m_p = 1.007\,276\,466\,578\,9 \text{ u}$
- $m_n = 1.008\,664\,916\,06 \text{ u}$
- $m_e = 5.485\,799\,090\,441 \times 10^{-4} \text{ u}$
- $m_1^1\text{H} = 1.007\,825\,031\,90 \text{ u}$
- $m_1^2\text{H} = 2.014\,101\,777\,84 \text{ u}$
- $m_1^3\text{H} = 3.016\,049\,281\,32 \text{ u}$
- $m_\alpha = 4.001\,506\,179\,129 \text{ u}$ ¹
- $m_{92}^{235}\text{U} = 235.043\,928\,1 \text{ u}$
- $m_{54}^{139}\text{Xe} = 138.918\,792\,2 \text{ u}$
- $m_{38}^{95}\text{Sr} = 94.919\,358 \text{ u}$

a) Es ist üblich, das Energieäquivalent für Massen in der Größenordnung von Elementarteilchen (z.B. Elektron) und Nukleonen (Protonen und Neutronen) in Einheiten von MeV/c^2 (Megaelektronvolt) anzugeben. Für atomare Massen ist es jedoch üblich diese in u (atomare Masseneinheit bzw. Dalton) anzugeben. Berechnen sie das Energieäquivalent von 1 u in MeV/c^2 . $E = mc^2$

b) Berechnen Sie das Energieäquivalent in MeV/c^2 der Ruhmassen m_0 für die atomaren Bausteine Proton, Neutron und Elektron. Mit vorher ermittelten Faktor verrechnen

Da in jeder Reaktion (chemisch, nuklear, etc.) Energie frei bzw. aufgebraucht wird, bedeutet dies, dass laut Gl. (3.1) auch eine Änderung der Masse auftreten muss. Diese Änderung der Masse wird als *Massendefekt* bezeichnet.

c) Holz hat eine mittlere Energiedichte von ca. 18 MJ/kg, d.h. diese Energie wird bei der Verbrennung freigesetzt. Berechnen Sie das Massenäquivalent der freigesetzten Energie, wenn 1 kg Holz verbrannt wird. Masse über $E = mc^2$ berechnen

d) Berechnen Sie den Massendefekt für das 1^1H Wasserstoffatom und vergleichen Sie den Wert mit dem Ionisationspotential von Wasserstoff: 13.598 439 005 344 94 eV.

Hinweis: Rechnen Sie in dieser Aufgabe sowohl mit den exakten Werten als auch mit etwaigen Näherungen aus vorherigen Teilaufgaben und vergleichen Sie.

$$\Delta m = m_{1^1\text{H}} - (m_p + m_e)$$

¹Ein Alphateilchen ist der doppelt positiv geladene Atomkern eines 4^2He Atoms.

- e) Die am einfachsten zu realisierende Fusionsreaktion ist die Fusion von Deuterium und Tritium. Diese besitzt die folgende Reaktionsgleichung:

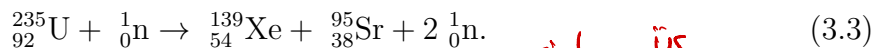


$\Delta m = m_{\text{prod.}} - m_{\text{Ed}}$
IP beachten

(3.2)

Berechnen Sie den Massendefekt in u und das zugehörige Energieäquivalent.

- f) In Kernkraftwerken werden ${}^{235}_{92}\text{U}$ Atome gespalten. Die freiwerdende Energie wird zur Produktion von Strom genutzt. Eine mögliche Spaltungsreaktion istⁱⁱ



siehe ÜS

(3.3)

Berechnen Sie die freigesetzte Energie dieser Spaltungsreaktion.

- g) Der durchschnittliche Stromverbrauch in der Schweiz pro Haushalt liegt bei ca. 5000 kWh pro Jahr. Berechnen Sie die Masse an Brennstoff um diesen Bedarf alleine mit Holz, Kernspaltung (Uran) bzw. Fusion (Wasserstoff) zu decken.

Sie können vereinfacht annehmen, dass der Wirkungsgrad 100 % beträgt, d.h. die freigesetzte Energie pro Reaktion wird zu 100 % in elektrischen Strom umgewandelt.

wenn noch Zeit ist.

Alle in dieser Aufgabe gelisteten Massen stammen aus CODATA 2022 bzw. der Atomic Mass Evaluation (AME) 2020:

- CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2022
- The AME 2020 atomic mass evaluation

ⁱⁱEs existieren verschiedene Fissionsprozesse. In Prozessen mit nur zwei Spaltprodukten können verschiedene Kernmassenzahlen von ca. 135 ± 15 und 95 ± 15 resultieren. Weiter existieren noch andere Fissionsprozesse mit mehr als nur zwei Spaltprodukten.