

ÜS 1 - Physik und Drehbewegungen

In PCO machen wir häufig auch recht grundlegende physikalische Berechnungen, wie in Physik I/II, weswegen wir kurz das wichtigste zusammenfasse.

Masseinheiten

Ein physikalische Grösse A wird immer als Produkt von Masszahl $\{A\}$ und Mass-einheit $[A]$ dargestellt, wobei sich alle Einheiten auf die sieben SI-Einheiten zurück-führen lassen. Darüber sind sechs Naturkonstanten exakt festgelegt worden.

$$A = \{A\}[A]$$

$$\text{Bsp: } F = 5 \text{ N} = 5 \text{ kg m s}^{-2}$$

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ As}$$

Zeit	t	Sekunde	1 s
Länge	l	Meter	1 m
Masse	m	Kilogramm	1 kg
Stromstärke	I	Ampere	1 A
Temperatur	T	Kelvin	1 K
Stoffmenge	n	Mol	1 mol
Lichtstärke	I_v	Candela	1 cd

Strahlung des Cs-Atoms	$\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770 \text{ s}^{-1}$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
Planck-Konstante	$h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$
Elementarladung	$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ As}$
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.380\,649 \times 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$
Avagadro-Konstante	$N_A = 6.022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Mechanik von Massenpunkten

In der Regel vereinfachen wir die Mechanik von Körpern, indem wir sie als sich bewegende Massenpunkte verstehen. Da die drei Bewegungen in den drei kartesischen Koordinaten unabhängig von einander betrachtet werden können, stellen wir den Ort $\vec{r}$, die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und die Beschleunigung $\vec{a}$ mit Vektoren aus.

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix}$$

Wir unterscheiden zwischen zwei Bewegungen, die recht leicht zu berechnen sind.

$$\text{Gleichförmig, geradlinige Bewegung: } \vec{v} = \text{konst.} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t-t_0)$$

$$\text{Gleichmässig beschleunigte Bewegung: } \vec{a} = \text{konst.} \Rightarrow \frac{d\vec{a}}{dt} = 0 \quad \begin{cases} \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t-t_0) \\ \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2 \end{cases}$$

Die drei Newton'schen Axiome:

1. Axiom: Trägheit: Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmig geradliniger Bewegung, solange keine Kräfte auf ihn wirken.

2. Axiom: Aktionsprinzip: Eine Änderung des Impulses eines Massenpunkts wird durch eine Kraft verursacht, sodass die Kraft proportional zu Massen und Beschleunigung ist.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \vec{F} = m\vec{a} \quad (1.10)$$

Kräfte addieren sich vektoriell zur Totalkraft gemäss Superpositionsprinzip:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i \quad (1.11)$$

3. Axiom: Reaktionsprinzip: Wenn zwei Körper miteinander wechselwirken, so hat jede Kraft die von A auf B wirkt $\vec{F}_{AB}$ eine gleichgrosse aber entgegengesetzte Gegenkraft $\vec{F}_{BA}$

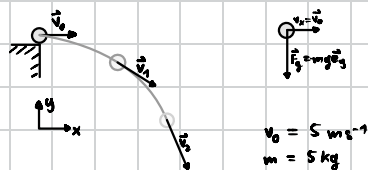
$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad (1.12)$$

Reibungskraft	$ \vec{F}_R = \mu \vec{F}_N $
Normalkraft	wirkt senkrecht auf Oberfläche
Gravitation	$\vec{F}_G = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r$
Gewichtskraft	$\vec{F}_g = -mg \hat{e}_z$
Federkraft	$\vec{F}_F = -k \Delta x$
Zentripetalkraft	$\vec{F}_{ZP} = \frac{mv^2}{r} \hat{e}_r$
Lorentzkraft	$\vec{F}_L = -q(\vec{v} \times \vec{B})$
Coulombkraft	$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{e}_r$
Elektrische Kraft	$\vec{F}_{el} = q \vec{E} $
Luftwiderstand	$\vec{F}_W = -\frac{1}{2} \rho c_w A v^2 \hat{e}_v$

Der Impuls $\vec{p}$ eines Körpers ist für gleichförmige geradlinige Bewegungen (Bewegungen ohne äussere Kraft) eine Erhaltungsgrösse, weswegen der Gesamtimpuls erhalten bleibt.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad E_{kin} = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$$

Aufg.: Bei einem waagerechten Wurf hat ein Ball der Masse $m = 5 \text{ kg}$ eine Anfangsgeschwindigkeit in x-Richtung von $v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und keine in y-Richtung. Nehme für die Gravitationskonstante $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ an.



a) Stelle die drei Vektoren $\vec{r}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$ für den Zeitpunkt t_1 auf.

$$\vec{r}(t=0) = \begin{bmatrix} x(t=0) \\ y(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}(t=0) = \begin{bmatrix} v_x(t=0) \\ v_y(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{a}(t=0) = \begin{bmatrix} a_x(t=0) \\ a_y(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

b) Stelle die drei Vektoren $\vec{r}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$ für den Zeitpunkt t_2 auf.

$$\vec{r}(t=t_1) = \begin{bmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 t_1 \\ -\frac{1}{2} g t_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \text{ m s}^{-1} \cdot 2 \text{ s} \\ -\frac{1}{2} \cdot 10 \text{ m s}^{-2} (2 \text{ s})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \text{ m} \\ -20 \text{ m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -20 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$\vec{v}(t=t_1) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y + at \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ -gt_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \text{ m s}^{-1} \\ -10 \text{ m s}^{-1} \cdot 2 \text{ s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \text{ m s}^{-1} \\ -20 \text{ m s}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -20 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{a}(t=t_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \text{ m s}^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

c) Welche totale Geschwindigkeit hat der Ball bei t_1 und unter welchem Winkel würde er auf eine Oberfläche einschlagen.

$$|\vec{v}(t_1)| = \left| \begin{bmatrix} 5 \\ -20 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right| = \sqrt{5^2 + (-20)^2} = \sqrt{425} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{v}_x \cdot \hat{e}_x|}{|\vec{v}| \cdot |\hat{e}_x|} = \frac{1}{1 \cdot 20.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{5}{20.6} \approx \frac{1}{4}$$

$$\varphi = \arccos(1/4) = 0.97 \text{ rad}$$

d) Welche Kraft wirkt auf den Ball?

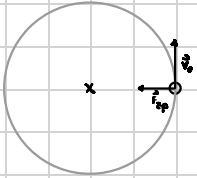
$$\vec{F} = m\vec{a} = -mg\hat{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m s}^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \end{bmatrix} \text{ kg m s}^{-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \end{bmatrix} \text{ N}$$

e) Berechne den Impuls $\vec{p}$ des Balles (zeitabhängig in y-Richtung)

$$\vec{p} = m\vec{v} = m \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} v_0 \\ at \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mv_0 \\ -mgt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \text{ kg} \cdot 5 \text{ m s}^{-1} \\ -5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m s}^{-2} \cdot t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \text{ kg m s}^{-1} \\ -50 \text{ N} \cdot t \end{bmatrix}$$

Kreisbewegungen

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung bewegt sich ein Körper mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag $|\vec{v}|$ auf einer Kreisbahn. Damit er das tut muss eine konstante Kraft $\vec{F}_{zp}$, die Zentripetalkraft, auf den Körper wirken, welche diesen in den Kreismittelpunkt drückt.

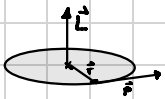


$$\vec{F}_{zp} = \frac{m|\vec{v}|^2}{|\vec{r}|} \hat{e}_r$$

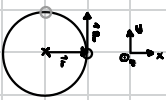
Bsp: Welche Kraft muss ein Seil der Länge $l=1\text{m}$ aushalten, um eine Kugel von $m=5\text{kg}$ und der Geschwindigkeit $v=5\text{ m s}^{-1}$ auf einer stabilen Kreisbahn zu halten?

$$|\vec{F}_{zp}| = \frac{mv^2}{r} = \frac{5\text{ kg} \cdot (5\text{ m s}^{-1})^2}{1\text{ m}} = 125\text{ N}$$

Der Drehimpuls $\vec{L}$ einer Kreisbewegung ist das rotatorische Äquivalent des linearen Impulses $\vec{p}$, und zeigt vektoriell senkrecht auf die Kreisebene der Rotation.



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kg m s}^{-1}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$