

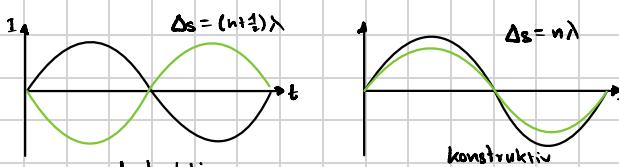
ÜS 10 - Photonenimpuls und Materiewellen

Interferenz

Interferenzeffekte sind die typischen Nachweisexperimente für den Wellencharakter eines Teilchens, wozu beispielsweise der **Doppelspalt** oder die Elektronenbeugung an Kristallen zählen. Der Doppelspalt funktioniert für alle Wellen, die Spaltgrößen und Abstände müssen entsprechend der Wellenlänge λ angepasst werden.

<https://experimente.phys.ethz.ch/de/100/10005/20007/30651/>

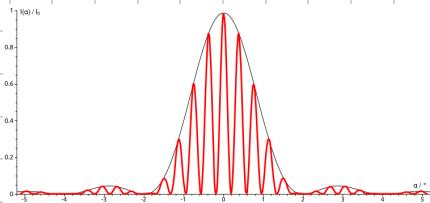
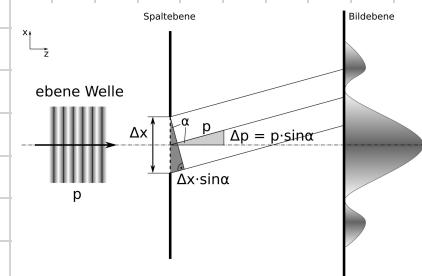
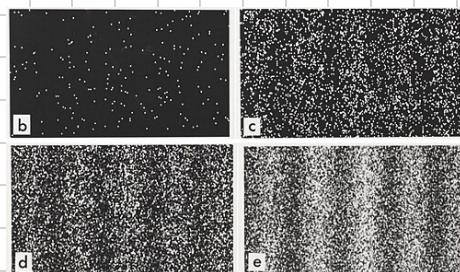
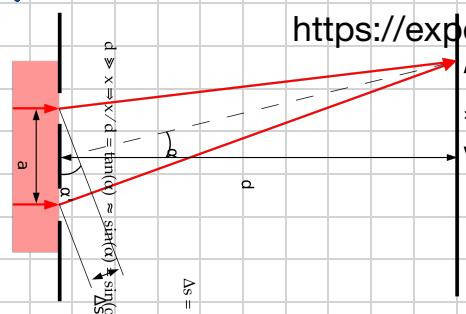
Wird monochromatisches Licht auf einen Doppelspalt mit den Spaltabständen a geworfen, so entsteht auf dem Schirm dahinter ein Interferenzmuster. Dies entsteht, da die beiden Spalten zwei Quellen für Wellen sind und diese konstruktiv und destruktiv interferieren können.



$$\sin(\alpha) = \frac{\Delta s}{a} \quad \tan(\alpha) = \frac{x}{a} \quad \text{kleine Winkel: } \sin \alpha \approx \tan \alpha$$

$$\frac{\Delta s}{a} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = \frac{d\Delta s}{a} \Rightarrow x_{\max} = \frac{d\lambda}{a}$$

Die Annahme, dass die beiden Spalte perfekte Punktquellen sind ist eine sinnvolle Vereinfachung, jedoch haben Photonen auch bei den beiden Einzelspaltkanten einen Gangunterschied. Aus diesem Grund sind auch am Einzelspalt Interferenzeffekte beobachtbar. Für Licht ist der Doppelspalt vollständig klassisch erkläbar, jedoch wurde er auch für Teilchen wie Neutronen im Einzelbeschuss beobachtet. Wird das Experiment jedoch hinter dem Spalt beobachtet, verschwindet das Interferenzmuster. Das liegt daran, dass vor der Messung des Quantensystems eine Überlagerung von zwei Zuständen gewesen ist, jedoch nach der Messung nur noch ein Zustand verbleibt.



Hamilton:

Die Schrödinger-Gleichung ist eine Verallgemeinerung der klassischen Mechanik nach dem Hamilton-Formalismus (Vorl. Allgemeine Mechanik, 3. Sem. Physik). Der Hamiltonoperator \hat{H} enthält alle Informationen eines QM-Systems (Postulat 1). Wendet man \hat{H} auf die zugehörige Wellenfunktion ψ eines Systems an, dann kommt die Energie des Systems multipliziert mit ψ heraus (Eigenwertgleichung: $\hat{H}\psi = E\psi$).

$$\Rightarrow \hat{H} \equiv \text{"Energieoperator"} \quad \hat{H} = \hat{T}_{\text{kin}} + \hat{V}_{\text{pot}} = \hat{T} + \hat{V}$$

In PC 0 haben wir nur 2 Energiebeiträge. Die potentielle Energie des Systems wird durch die Aufgabe / Problem / QM-System gegeben. Der kinetische Energieoperator \hat{T}_{kin} ist immer gleich für Systeme mit einem Teilchen.

$$1D: \quad \hat{T}_{\text{kin}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$2D: \quad \hat{T}_{\text{kin}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

$$3D: \quad \hat{T}_{\text{kin}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$$\text{Laplace-Operator} \quad \Delta = \nabla^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad N = \dim(\text{System})$$

$$\text{Einfach die Summe aller zweifachen Ortsableitungen}$$

$$\Delta_{1D} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \Delta_{2D} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \Delta_{3D} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

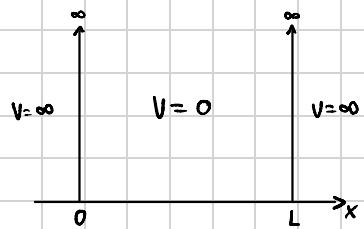
Wellenfunktion ψ :

Jeder Hamiltonian \hat{H} hat eine zugehörige Eigenfunktion, die Wellenfunktion ψ , die aber meistens komplexwertig ist, nicht messbar ist und deswegen keine direkte physikalische Bedeutung hat. In PC III merkt man dann auch, dass man sie eigentlich nie explizit berechnen muss, da man nur an den Energieeigenwerten interessiert ist (bspw. Spin). Da wir ein Teilchen in der QM nicht mehr über den Ort charakterisieren können, haben wir jetzt die Wellenfunktion, die ein bisschen die "Versetzung" eines Teilchens anzeigt.

Interpretation nach Born: Das Betragsquadrat $|\psi|^2 = |\psi|^2$ der Wellenfunktion ist die Wahrscheinlichkeitsdichte des Teilchens. Deswegen muss das Integral über den gesamten Raum gleich 1 sein, weil irgendwo muss das Teilchen im Raum sein

$$\text{Normierungsbedingung: } \int_{\Omega} |\psi|^2 d\tau = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1D: \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \\ 2D: \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx dy = 1 \\ 3D: \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx dy dz = 1 \end{cases}$$

Teilchen im Kasten



$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\hat{H} = \hat{T}_{\text{kin},1D} + \hat{V}_{\text{pot}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$\text{Schrödinger-Gleichung im Kasten: } \hat{H} \psi(x) = E \psi(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi = E \psi \Rightarrow E \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \psi'' = 0$$

lineare, homogene DGL mit konst. Koeff. 2. Ordnung \Rightarrow Euler-Ansatz \Rightarrow char. Poly.: $\chi(\lambda) = E + \frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2$

$$\chi(\lambda) = E + \frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow -E = \frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (\text{komplexe Nullstellen})$$

$$\lambda = a \pm ib \quad \psi(x) = A e^{ax} \cos(bx) + B e^{ax} \sin(bx) \Rightarrow \psi(x) = A e^{ax} \cos(x \cdot \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}) + B e^{ax} \sin(x \cdot \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}})$$

$$\psi(0) = A \cos(x \cdot \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}) + B \sin(x \cdot \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}) \quad | \quad \text{Randbedingungen} \quad \psi(0) = \psi(L) = 0$$

$$\psi(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = A \cos(0) + B \sin(0) = A = 0$$

$$[A=0]$$

Nullstellen des \sin

$$\psi(L) = 0 \Leftrightarrow 0 = B \sin(L \cdot \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}) \Rightarrow L \cdot \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = n\pi \Leftrightarrow L \cdot \frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar^2} = n^2\pi^2 \Leftrightarrow E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{\hbar^2 n^2}{8mL^2}$$

Die Quantisierung der Energie ergibt sich durch Erfüllung von Randbedingungen.

$$\psi_n(x) = B \sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x\right) = B \sin\left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \sqrt{\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}} x\right) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \psi_n(x)$$

$$\text{Normierungsbedingung: } \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \Leftrightarrow 1 = \int_0^L B^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \Leftrightarrow \frac{1}{B^2} = \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \Rightarrow B = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\text{Allgemein gilt: } \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \Rightarrow \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^L (1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)) dx \\ = \frac{1}{2} \left[x - \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \cdot \frac{L}{2n\pi} \right]_0^L \\ = \frac{1}{2} \left[L - \sin\left(\frac{2n\pi L}{L}\right) \cdot \frac{L}{2n\pi} - (0 - \sin(0) \cdot \frac{L}{2n\pi}) \right] \\ = \frac{1}{2} \left[L - \sin(2n\pi) \cdot \frac{L}{2n\pi} \right] = \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{mit} \quad E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8mL^2} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$