Zusatzstunde AC I (PC) – Kinetik der Zerfälle

Differenzialgleichungen 1. Ordnung

7 Differentialgleichungen

Klassifizierung von Differentialgleichungen, also Gleichungen in denen eine Funktion $y(x)$ und ihre Ableitungen $y^{(n)}(x)$ vorkommen, über:

Ordnung: *Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung*

Homogenität: *Jeder Term der DGL ist mit einem y-Term multipliziert*

Linearität: *Alle y-Terme sind linear (keine nicht-linearen y-Terme wie $\sin(y')$ oder y^2)*

konst. Koeff.: *Alle Vorfaktoren vor den y-Termen sind konstant*

Inhomogene DGLs setzen sich allgemein aus einer homogenen Lösung $y_h(x)$ und einer partikulären Lösung $y_p(x)$ zusammen.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Die homogene Lösung ist die Lösung der DGL, wenn die inhomogenen Term gleich null gesetzt werden.

7.1 Differentialgleichungen erster Ordnung

7.1.1 Separation der Variablen

Für DGLs bei denen alle y-Ausdrücke und alle x-Ausdrücke sich als Produkt schreiben lassen, sodass folgendes gilt:

$$y'(x) = f(y) \cdot g(x)$$

Vorgehen: Separation der Variablen

1. Alle y- und alle x-Terme als Produkt voneinander schreiben, s.d. $y'(x) = f(y) \cdot g(x)$ gilt.
2. y' als $\frac{dy}{dx}$ schreiben.
3. Alles mit y auf eine Seite und mit x auf die andere, jedoch müssen die Differenziale dy und dx zwingend im Zähler stehen
4. Beide Seiten unbestimmt integrieren und $+C$ auf einer Seite schreiben
5. Nach $y(x)$ auflösen

Beispiel: Separation der Variablen

$$y'(x) = \frac{1}{xy^2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy^2}$$
$$y^2 dy = \frac{1}{x} dx$$
$$\int y^2 dy = \int \frac{1}{x} dx$$
$$\frac{y^3}{3} = \ln(|x|) + C$$
$$y(x) = \sqrt[3]{3\ln(|x|) + 3C}$$

$$y' = -ky \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -ky \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

$$\frac{dy}{y} = -k dx \quad \overset{S}{\Rightarrow} \quad \int \frac{dy}{y} = -\int k dx$$

$$\ln(y) = -kx + C$$

$$y(x) = e^{-kx} \cdot e^{C} = y_0 e^{-kx}$$

$$N(t) = e^{-kt} \cdot N_0$$

Zerfallskinetik

Wir nehmen an wir haben eine Box in der 1 mol ^{238}U ist. Dieses zerfällt über die Zeit zu ^{234}Th und wir wollen jetzt die Zerfallskinetik (zeitliche Entwicklung der Teilchenzahl $N(t)$) untersuchen. Zu Beginn sind viele Teilchen vorhanden, also viele Zerfälle, was immer stärker abnimmt. Die Zerfallsgeschwindigkeit ist proportional zur Anzahl vorhandener Teilchen $N(t)$. Die Zerfallsgeschwindigkeit entspricht der Änderung der Teilchenzahl über die Zeit, also die zeitliche Ableitung $\frac{dN(t)}{dt}$.

$$X \xrightarrow{k} Y \qquad \frac{dN_X(t)}{dt} = -kN_X(t) = -\frac{dN_Y(t)}{dt} \overset{\text{Sep. d. V.}}{\Longrightarrow} \int \frac{dN}{N} = -k \int dt \Leftrightarrow \ln(N) = -kt + C \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-kt}$$

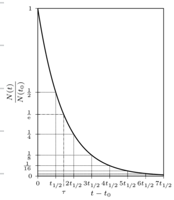
Der radioaktive Zerfall ist stochastisch für ein einzelnes Atom und unabhängig von äusseren Parametern wie Druck, Temperatur, etc. Die Zerfallsrate $\frac{dN}{dt}$ ist proportional zur Teilchenzahl N mit dem Proportionalitätsfaktor k, die Zerfallskonstante in $[k] = s^{-1}$ (strikt positiv).

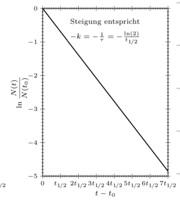
$$^{146}_{62}Sm \xrightarrow{k_1} {}^{142}_{60}Nd^{2-} + {}^{4}_{2}He^{2+} \qquad \frac{dN_{Sm}}{dt} = -k_1 N_{Nd}$$

$$^{235}_{92}U \xrightarrow{k_2} {}^{231}_{90}Th^{2-} + {}^{4}_{2}He^{2+} \qquad \frac{dN_U}{dt} = -k_2 N_{Th}$$

$$^{198}_{79}Au \xrightarrow{k_3} {}^{198}_{80}Hg^{+} + e^- + \bar{\nu}_e \qquad \frac{dN_{Au}}{dt} = -k_3 N_{Hg}$$

$$^{40}_{19}K \xrightarrow{k_4} {}^{40}_{18}Ar^{-} + e^+ + \nu_e \qquad \frac{dN_K}{dt} = -k_4 N_{Ar}$$





Grösse	Gleichung	Einheit	Bedeutung
Zefallskonstante k	$\frac{dN}{dt} = -kN$	$[k] = s^{-1}$	
Halbwertszeit $t_{1/2}$	$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k}$	$[t_{1/2}] = s$	Zeit zur Halbierung der Teilchenzahl
Lebenszeit τ	$\tau = \frac{1}{k}$	$[\tau] = s$	Zeit bis $\frac{1}{e}$ der ursprünglichen Teilchenzahl erreicht ist
Aktivität $A(t)$	$A = kN = -\frac{dN}{dt}$	$[A] = Bq = s^{-1}$	Anzahl Zerfälle pro Sekunde

Bsp.:

$$t_{1/2}(^{238}U) = 245\,500\ a$$

$$k = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} = 8.947 \times 10^{-14}\ s^{-1}$$

$$\tau = \frac{1}{t_{1/2}} = 1.291 \times 10^{-13}\ s^{-1}$$

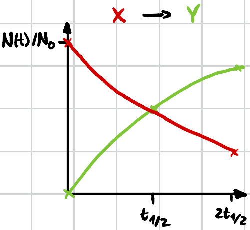
Bsp.: $^{225}_{89}Ar \xrightarrow[k]{\alpha} {}^{221}_{87}Fr$ $\qquad k = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} = 8.02 \times 10^{-7}\,s^{-1}$

$t_{1/2} = 10.0\,d \qquad t_{1/2} = 4.9\,min$

Nach 20.0 Tagen: $N(t) = N_0\, e^{-kt} \Rightarrow N(20.0\,d) = 1000\, e^{-k \cdot 20.0 d} = 250$

Skizzieren von Zerfällen

In der Klausur ist häufig gefordert, dass man Zerfallsprozesse grafisch auftragen soll. Das bedeutet man soll die Teilchenzahl $N_X(t)$ gegen die Zeit auftragen. Die entspricht für einen einfachen Zerfall einer exponentiellen Abnahme.



$$\frac{dN_X}{dt} = -\frac{dN_Y}{dt} = -kN_X$$

$$N_X(t) = N_0\, e^{-kt}$$

In der Klausur betrachtet man dabei eigentlich nie einfache Zerfälle, sondern immer Folge- bzw. Parallelreaktionen. Es wird erwartet, sinnvolle Vereinfachungen zu treffen.

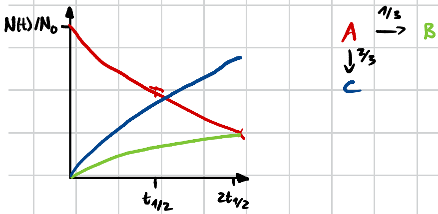
Parallelreaktionen: Sofern ein Mutternuklid auf mehrere Arten zerfallen kann, sind mehrere Parallelreaktionen zu den Tochternukliden T_i mit ihrer jeweiligen Wahrscheinlichkeit w_i möglich. Die Abnahme der Teilchenzahl des Mutternuklids X ist weiterhin beschreibbar mit:

$$\mathrm{X} \xrightarrow[w_1, w_2]{k_\mathrm{X}} \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 \qquad \frac{\mathrm{d}N_\mathrm{X}}{\mathrm{d}t} = -k_\mathrm{X} N_\mathrm{X} \tag{1.11}$$

Für die Änderung der Teilchenzahl der Tochternuklide muss die Wahrscheinlcihkeit des Zerfalls mit einbezogen werden:

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{T}_1}}{\mathrm{d}t} = -w_1 \frac{\mathrm{d}N_\mathrm{X}}{\mathrm{d}t} = w_1 k_\mathrm{X} N_\mathrm{X} \qquad N_{\mathrm{T}_1}(t) = w_i N_\mathrm{X}(t_0)\left(1 - \mathrm{e}^{-k_\mathrm{X} t}\right) \tag{1.12}$$

Das Teilchenzahlverhältnis der Tochternuklide ist stets gleich und entspricht der Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Zerfalls

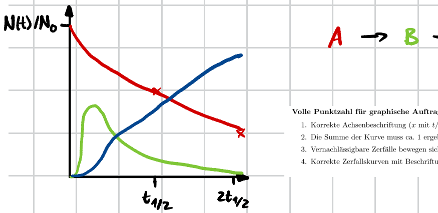


Folgereaktionen: Sofern ein Tochternuklid nicht stabil ist und weiter zerfällt, handelt es sich um eine Folgereaktion, für die sich für jede Teilchenspezies eine DGL aufstellen, was in ein DGL-System endet.

$$\mathrm{T}_1 \xrightarrow{k_1} \mathrm{T}_2 \xrightarrow{k_2} \mathrm{T}_3 \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{T}_1}}{\mathrm{d}t} = -k_1 N_{\mathrm{T}_1} \\ \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{T}_2}}{\mathrm{d}t} = k_1 N_{\mathrm{T}_1} - k_2 N_{\mathrm{T}_2} \\ \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{T}_3}}{\mathrm{d}t} = k_2 N_{\mathrm{T}_2} \end{cases} \tag{1.13}$$

Folgeprozesse analytisch zu lösen, ist sehr zeitintensiv, weswegen bei hinreichend kleiner Halbwertszeit eines Schritts entsprechende Vereinfachungen getroffen werden dürfen:

$$\mathrm{T}_1 \xrightarrow[t_{1/2}=4\,\mathrm{h}]{k_1} \mathrm{T}_2 \xrightarrow[t_{1/2}=0.3\,\mu\mathrm{s}]{k_2} \mathrm{T}_3 \qquad \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{T}_3}}{\mathrm{d}t} \approx k_1 N_{\mathrm{T}_1} \tag{1.14}$$



Volle Punktzahl für graphische Auftragung von $N_\mathrm{X}(t)$ und $N_\mathrm{Y}(t)$

1. Korrekte Achsenbeschriftung (x mit t/a und y mit $\frac{N(t)}{N_\mathrm{X}(t_0)}$)
2. Die Summe der Kurve muss ca. 1 ergeben
3. Vernachlässigbare Zerfälle bewegen sich nahe null
4. Korrekte Zerfallskurven mit Beschriftung ($t_{1/2}$ ca. $y = 0.5$)