1 Radioaktivität

1.1 Relativer Fehler δ und mittlere Masse $\bar{m}$:

$$m_{^{17}\mathrm{O}} = 16.999131756\,50\,(69)\,\mathrm{u} \qquad \delta_{m_{^{17}\mathrm{O}}} = \frac{0.000000000\,69}{16.999131756\,50} = 4.1 \times 10^{-9}\,\%$$

Mittlere Masse: Summe der Häufigkeiten h_x aller Isotope mal seiner Masse m_x.

$$\bar{m}_{\mathrm{O}} = m_{^{16}\mathrm{O}} h_{^{16}\mathrm{O}} + m_{^{17}\mathrm{O}} h_{^{17}\mathrm{O}} + m_{^{18}\mathrm{O}} h_{^{18}\mathrm{O}}$$

1.2 Massendefekt

$$\Delta m_{{}^{A}_{Z}\mathrm{X}} = Z(m_\mathrm{p} + m_\mathrm{e}) + (A - Z)m_\mathrm{n} - m_{{}^{A}_{Z}\mathrm{X}} \qquad E_\mathrm{b} = \Delta m_{{}^{A}_{Z}\mathrm{X}} \cdot c^2$$

Freiwerdende Energie einer Kernreaktion:

$${}^{241}_{95}\mathrm{Am} \rightarrow {}^{237}_{93}\mathrm{Np}^{2-} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+} \qquad E = \Delta m c^2 = (m_{{}^{241}_{95}\mathrm{Am}} - (m_{{}^{237}_{93}\mathrm{Np}} + m_{{}^{4}_{2}\mathrm{He}}))c^2$$

1.3 Zerfallsprozesse:

α		${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y}^{2-} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+}$
β^-	${}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{p}^{+} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e}^{-} + \bar{\nu}_\mathrm{e}$	${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y}^{+} + \mathrm{e}^{-} + \bar{\nu}_\mathrm{e}$
β^+	${}^{1}_{1}\mathrm{p}^{+} \rightarrow {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{0}_{1}\mathrm{e}^{+} + \nu_\mathrm{e}$	${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y}^{-} + \mathrm{e}^{+} + \nu_\mathrm{e}$
ε	${}^{1}_{1}\mathrm{p}^{+} + \mathrm{e}^{-} \rightarrow {}^{1}_{0}\mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}$	${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y}^{-*} + \mathrm{e}^{+} + \nu_\mathrm{e}$

1.4 Kernfusion

1.5 Zerfallskinetik

$$\mathrm{X} \xrightarrow{k} \mathrm{Y} \qquad \frac{\mathrm{d}N_\mathrm{X}(t)}{\mathrm{d}t} = -kN_\mathrm{X}(t) = -\frac{\mathrm{d}N_\mathrm{Y}(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \boxed{N(t) = N(t_0)\mathrm{e}^{-kt}}$$

Grösse	Gleichung	Einheit	Bedeutung
Zefallskonstante k	$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -kN$	$[k] = \mathrm{s}^{-1}$	
Halbwertszeit $t_{1/2}$	$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k}$	$[t_{1/2}] = \mathrm{s}$	Zeit zur Halbierung der Teilchenzahl
Lebenszeit τ	$\tau = \frac{1}{k}$	$[\tau] = \mathrm{s}$	Zeit bis $\frac{1}{\mathrm{e}}$ der ursprünglichen Teilchenzahl erreicht ist
Aktivität $A(t)$	$A = kN = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$	$[A] = \mathrm{Bq} = \mathrm{s}^{-1}$	Anzahl Zerfälle pro Sekunde

$$N(t) = N_0\mathrm{e}^{-kt} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) \quad \textit{(Radiodatierung)}$$

1.5.1 Parallelreaktionen

$$\mathrm{X} \xrightarrow[w_1, w_2]{k_\mathrm{X}} \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 \qquad \frac{\mathrm{d}N_\mathrm{X}}{\mathrm{d}t} = -k_\mathrm{X}N_\mathrm{X}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{T}_1}}{\mathrm{d}t} = -w_1\frac{\mathrm{d}N_\mathrm{X}}{\mathrm{d}t} = w_1 k_\mathrm{X} N_\mathrm{X} \qquad N_{\mathrm{T}_1}(t) = w_i N_\mathrm{X}(t_0)\left(1 - \mathrm{e}^{-k_\mathrm{X}t}\right)$$

1.5.2 Folgereaktionen

$$\mathrm{T}_1 \xrightarrow{k_1} \mathrm{T}_2 \xrightarrow{k_2} \mathrm{T}_3 \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{T}_1}}{\mathrm{d}t} = -k_1 N_{\mathrm{T}_1} \\ \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{T}_2}}{\mathrm{d}t} = k_1 N_{\mathrm{T}_1} - k_2 N_{\mathrm{T}_2} \\ \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{T}_3}}{\mathrm{d}t} = k_2 N_{\mathrm{T}_2} \end{cases}$$

$$\mathrm{T}_1 \xrightarrow[t_{1/2}=4\,\mathrm{h}]{k_1} \mathrm{T}_2 \xrightarrow[t_{1/2}=0.3\,\mu\mathrm{s}]{k_2} \mathrm{T}_3 \qquad \frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{T}_3}}{\mathrm{d}t} \approx k_1 N_{\mathrm{T}_1}$$

1.5.3 Volle Punktzahl für graphische Auftragung von $N_\mathrm{X}(t)$ und $N_\mathrm{Y}(t)$

1. Korrekte Achsenbeschriftung (x mit t/a und y mit $N(t)/N_\mathrm{X}(t_0)$)
2. Die Summe der Kurve muss ca. 1 ergeben
3. Vernachlässigbare Zerfälle bewegen sich nahe null
4. Korrekte Zerfallskurven mit Beschriftung ($t_{1/2}$ ca. $y = 0.5$)

1.5.4 Begriffe aus der Nuklidkarte

Isotope	Atome desselben Elements (gleiche Ordnungszahl), jedoch unterschiedlicher Neutronenzahl (unterschiedliche Massenzahl)
Isotone	Atome mit derselben Neutronenzahl
Isobare	Atome mit derselben Massezahl
Isodiaphere	Atome mit demselben Neutronenüberschuss $A - 2Z$
Isomere	Metastabile angeregte Kernzustände

2 Quantenmechanik

Verständnispunkte

1. Die Quantisierung eines Systems kommt durch das Erfüllen der Randbedingungen zustande. Eine Quantenzahl beschreibt einen Zustand des Systems.
2. Die Anzahl der verschiedenen Quantenzahlen entspricht der Dimension des Problems
3. Nullstellen der Wellenfunktion sind **Knoten**, wobei die Energie des Systemzustands mit steigender Knotenzahl zunimmt.
4. QM-Systeme haben oft eine **Nullpunktsenergie** ungleich null. Beim Teilchen im Kasten enspricht das $E_1 = h^2/8mL^2$

2.1 Wellenmechanik

Wellengleichungen für monochrommatisches Licht (nur eine Wellenlänge):

$$\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kz) \qquad \vec{B} = B_0\cos(\omega t - kz)$$

Zeitbereich	Ortsbereich
Periode: $T = \frac{2\pi}{\omega}$	Wellenlänge: λ
Frequenz: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$	Wellenzahl: $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$
Kreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$	Kreiswellenzahl: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\tilde{\nu}$

Energie und Impuls eines Photons:

$$\boxed{E_\mathrm{ph} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \hbar\omega} \qquad |\vec{p}| = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \qquad c = \lambda\nu$$

2.2 De-Broglie-Wellenlänge (Materienwellen)

$$\lambda_\mathrm{B} = \frac{h}{|\vec{p}|} = \frac{h}{m|\vec{v}|} = \frac{h}{\sqrt{2m_\mathrm{e}E_\mathrm{kin}}} \qquad E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\vec{v}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m_\mathrm{e}}$$

2.2.1 Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad [\hat{x}, \hat{p}_x] \neq 0$$

2.3 Zeitabhängige Schrödingergleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V\right]\Psi(x,y,z,t) = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,y,z,t)$$

Hamiltonoperator $\hat{H}$ mit kinetischer Energie V:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\overbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}^{\equiv\Delta}}_{E_\mathrm{kin}} + \underbrace{V(x,y,z,t)}_{E_\mathrm{pot}}$$

2.4 Zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}E}{\hbar}t\right) \qquad \boxed{\hat{H}\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z)}$$

2.5 Interpretation der Wellenfunktion nach Born

Wahrscheinlichkeit P das Teilchen im Volumen V zu finden (sodass $|\psi|^2$ zur Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wird).

$$P = \iiint_V |\psi(x,y,z)|^2\,\mathrm{d}V \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,y,z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 1$$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*\Psi = \psi^*\mathrm{e}^{+\mathrm{i}Et/\hbar}\psi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar} = |\psi(x)|^2$$

$|\psi|^2$ ist meist **symmetrisch**, weswegen Integrale vereinfacht werden können.

2.6 Teilchen im 1D-Kasten

Hamiltonoperator für Teilchen im 1D-Kasten:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \qquad V(x) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \textit{sonst} \end{cases}$$

Zeitunabhängige Schrödingergleichung (n ist die Quantenzahl):

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\right]\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$$

Energieeigenwerte und Wellengleichung:

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2mL^2} = \frac{h^2n^2}{8mL^2} \qquad \psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}}x\right) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Wahrscheinlichkeit ein Teilchen im Kasten zwischen a und b zu finden.

$$P_n[a,b] = \frac{2}{L}\int_a^b \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{L} - \frac{1}{2n\pi}\left(\sin\left(\frac{2n\pi b}{L}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi a}{L}\right)\right)$$

2.7 Teilchen in 2D-Kasten

2.8 Harmonische Oszillator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 \qquad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\omega_1$$

$$E_v = h\nu_\mathrm{e}\left(v + \frac{1}{2}\right) = hc\omega_\mathrm{e}\left(v + \frac{1}{2}\right) \qquad \nu_\mathrm{e} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad \omega_\mathrm{e} = \frac{\nu_\mathrm{e}}{c}$$

2.9 Anharmonischer Oszillator

$$\frac{E_v}{hc} = \omega_e\left(v + \frac{1}{2}\right) - \omega_e x_e\left(v + \frac{1}{2}\right)^2$$

2.10 Erwartungswerte

$$\langle\hat{A}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\hat{A}\psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\hat{A}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

2.11 Operatoren

$$\hat{x} = x \qquad \hat{p_x} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad \hat{T} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

3 Atomphysik

3.1 Bohrsches Atommodell und E_n auch für Wasserstoffatom nach Schrödinger

$$\mu = \frac{m_\mathrm{e}m_\mathrm{K}}{m_\mathrm{e} + m_\mathrm{K}} \qquad a = \frac{m_\mathrm{e}}{\mu}a_0 = \frac{m_\mathrm{e}}{\mu}\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_\mathrm{e}} \qquad R = \frac{\mu}{m_\mathrm{e}}R_\infty$$

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2n^2}{\mu e^2Z} = \frac{an^2}{Z} \qquad \boxed{E_n = -\frac{\mu e^4Z^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2n^2} = -\frac{hcRZ^2}{n^2} = -\frac{hcR_\infty\mu Z^2}{m_\mathrm{e}n^2}}$$

Energieübergang $n_\mathrm{i} \rightarrow n_\mathrm{f}$ (analog zur Balmer-Formel) und Ionisationsenergie E_IE:

$$\boxed{h\nu = hcRZ^2\left|\frac{1}{n_\mathrm{f}^2 - n_\mathrm{i}^2}\right|} \qquad E_\mathrm{IE} = E_\infty - E_1 = 0 - E_1 = hcRZ^2$$

3.2 Mehrelektronensysteme

n	Hauptquantenzahl ($n \in \mathbb{N}$)	"Schale" $\mathbf{1s^2}$
l	Nebenquantenzahl ($l \in \mathbb{N}_0$)	"Orbitalart" $\mathrm{s, p, d, f, \cdots}$
m_l	Magnetquantenzahl ($m_l = -l, \cdots, 0, \cdots, l$)	"Orbitalausrichtung" $\mathrm{p}_x, \mathrm{p}_y, \mathrm{p}_z$
s	Spin ($s = \pm\frac{1}{2}$)	"up/down" He : $1s^2 = \boxed{\uparrow\downarrow}$

Orbitale werden mit aufsteigender Energie befüllt (Aufbau-Prinzip).
1. Hundsche Regel: *Entartete Orbitale werden zunächst einzeln aufgefüllt.*
2. Hundsche Regel: *Orbitale derselben Nebenquantenzahl werden absteigend nach m_l aufgefüllt.*
Pauli-Ausschluss-Prinzip: *Die Fermionen (Elektronen) eines Systems (Atom) müssen sich in mindestens einer Quantenzahl unterscheiden.*

3.3 Termsymbole

L — Gesamtbahndrehimpulsvektor

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l_i}$$

Summe aller m_l-Quantenzahlen

$$2\mathrm{p}\ \underset{1}{\boxed{\uparrow\downarrow}}\underset{0}{\boxed{\uparrow}}\underset{-1}{\boxed{\uparrow}} \Rightarrow L = 2 \cdot 1 + 0 + (-1) = 1 = P$$

L	0	1	2	3	4	5
	S	P	D	F	G	H

S — Gesamtelektronenspin-drehimpulsvektor

$$\vec{S} = \sum_i \vec{s_i}$$

Alle Elektronenspins zusammen
(**Spinmultiplizität** $= 2S + 1$)

$$2\mathrm{p}\ \boxed{\uparrow\downarrow}\boxed{\uparrow}\boxed{\uparrow} \Rightarrow S = 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

S	$2S+1$	Zustand
0	1	Singulett-Zustand
1/2	2	Dublett-Zustand
1	3	Triplett-Zustand
3/2	4	Quartett-Zustand

J — Gesamtdrehimpulsvektor

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j_i}$$

$$J = \begin{cases} L + S & \textit{für mehr als halb gefüllte Schalen} \\ |L - S| & \textit{für weniger als halb gefüllte Schalen} \end{cases}$$

$$2\mathrm{p}\ \boxed{\uparrow\downarrow}\boxed{\uparrow}\boxed{\uparrow} \Rightarrow S = 1 \quad L = 1 \Rightarrow J = L + S = 2$$

Termsymbol

$$\boxed{{}^{2S+1}L_J}$$

$$2\mathrm{p}\ \boxed{\uparrow\downarrow}\boxed{\uparrow}\boxed{\uparrow} \Rightarrow \begin{cases} S = 1 \\ L = 1 \\ J = 2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{O}: \boxed{{}^3P_2}$$

4 Physik