I) Grundlegende Physik

Bevor wir in die eigentlichen Themen von PCO einsteigen können, müssen wir einige Grundlagen aus Physik und Analysis repetieren. Wir machen das direkt am Anfang, damit ihr zwischen Tag 1 und Tag 2 die Möglichkeit habt, einige Lücken zu schliessen und so dem PVK besser folgen könnt.

SI-Einheiten

Ein physikalische Grösse A wird immer als Produkt von Masszahl {A} und Masseinheit [A] dargestellt, wobei sich alle Einheiten auf die sieben SI-Einheiten zurückführen lassen. Darüber sind sechs Naturkonstanten exakt festgelegt worden.

$A = \{A\}[A]$ Bsp.: $F = 5\,N = 5\,kg\,m\,s^{-2}$ $e = 1.602\times 10^{-19}\,C = 1.602\times 10^{-19}\,As$

Zeit	t	Sekunde	1 s
Länge	l	Meter	1 m
Masse	m	Kilogramm	1 kg
Stromstärke	I	Ampere	1 A
Temperatur	T	Kelvin	1 K
Stoffmenge	n	Mol	1 mol
Lichtstärke	I_v	Candela	1 cd

Strahlung des Cs-Atoms	$\Delta\nu_{Cs} = 9\,192\,631\,770\,s^{-1}$
Lichtgeschwindigkeit	$c = 299\,792\,458\,m\,s^{-1}$
Planck-Konstante	$h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34}\,kg\,m^2\,s^{-1}$
Elementarladung	$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\,A\,s$
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.380\,649 \times 10^{-23}\,kg\,m^2\,s^{-2}\,K^{-1}$
Avagadro-Konstante	$N_A = 6.022\,140\,76 \times 10^{23}\,mol^{-1}$

In PCO sind Ergebnisse ohne Einheiten oder mit falscher Einheit falsch, jedoch übernimmt in den meisten Fällen das der Taschenrechner. Achtet auch auf die signifikanten Stellen, denn Ergebnisse mit zu vielen Nachkommastellen suggerieren eine falsche Sicherheit und werden demnach als falsch bewertet. Manchmal werden Werte in der Prüfung mit relativen Fehler angegeben, wobei die Zahlen in den Klammern die Unsicherheit der letzen Nachkommastellen angibt.

$$x = 1.314\underline{73}\,(36)$$

① Eine Spektrallinie liegt bei $\lambda = 656.3\,nm$. Konvertieren Sie diese Wellenlänge in die folgenden Einheiten mit $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = hc\tilde{\nu}$

a) Wellenzahl $\tilde{\nu}$ in cm^{-1}

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{656.3\times 10^{-9}\,m} = 1.524\times 10^{6}\,m^{-1} = 1.524\times 10^{4}\,cm^{-1}$$

b) Energie E in J

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.626\times 10^{-34}\,Js)(2.998\times 10^{8}\,m\,s^{-1})}{656.3\times 10^{-9}\,m} = 3.027\times 10^{-19}\,J$$

c) Energie in kJ/mol

$$E_{mol} = E \cdot N_A = 3.027\times 10^{-19}\,J \cdot 6.022\times 10^{23}\,mol^{-1} = 1823\,\frac{kJ}{mol}$$

② Chlor besteht in natürlicher Häufigkeit aus zwei stabilien Isotopen. Berechnen Sie die mittlere Atommasse.

Isotop	Häufigkeit	Atommasse
^{35}Cl	75.77 %	39.96885 u
^{37}Cl	24.23 %	36.96590 u

$$\bar{m} = h_{35} m_{35} + h_{37} m_{37}$$
$$= 0.7577 \cdot 34.96885\,u + 0.2423 \cdot 36.96590\,u$$
$$= 35.460\ u$$

③ Die Atommasse von ^{17}O wird in Tabellen als $m_{^{17}O} = 16.99913175650\,(69)\ u$ angegeben. Bestimmen Sie den relativen Fehler in Prozent.

$$\delta = \frac{B}{m} = \frac{6.9 \times 10^{-10}\,u}{16.999...\,u} = 4.1 \cdot 10^{-11} = 4.1 \cdot 10^{-9}\,\%$$

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind Gleichungen in denen Funktionen $y(x)$ und ihre Ableitungen vorkommen. Ziel ist es Funktionen zu finden, die diese Gleichung lösen. Dazu klassifizieren wir DGLs wie folgt.

Ordnung:	Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung
Homogenität:	Jeder Term der DGL ist mit einem y-Term multipliziert
Linearität:	Alle y-Terme sind linear (keine nicht-linearen Terme wie $\sin(y')$ oder y^2
konst. Koeff.:	Alle Vorfaktoren vor den y-Termen sind konstant

Inhomogene DGLs setzen sich allgemein aus einer homogenen Lösung y_h (Inhomogenität null setzen) und einer partikulären Lösung y_p zusammen.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Separation der Variablen Sofern sich Funktion $y(x)$ und Variable x der DGL in eine Produktform bringen lässt, lassen sich die Variablen separieren und so ist die DGL zu lösen.

1.) Alle y- und x-Terme als Produkt voneinander schreiben, sodass $y'(x) = f(y) \cdot g(x)$ gilt
2.) $y'(x)$ als $\frac{dy}{dx}$ schreiben
3.) Alles mit y und alles mit x auf eine Seite, sodass die Differentiale dy und dx im Zähler stehen
4.) Beide Seiten unbestimmt integrieren
5.) Nach $y(x)$ auflösen

Bsp.: $y' = \frac{1}{xy^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy^2} \iff y^2\,dy = \frac{dx}{x}$$

$$\int y^2\,dy = \int \frac{dx}{x} \iff \frac{y^3}{3} = \ln(x) + C$$

$$y(x) = \sqrt[3]{3\ln(x) + 3C}$$

④ Gegeben ist die DGL $y'(t) = -3y$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 5$.

a) Geben Sie die Lösung $y(t)$ an.

$$y'(t) = -3y \iff \frac{dy}{dt} = -3y \iff \frac{dy}{y} = -3\,dt \iff \int \frac{dy}{y} = \int -3\,dt \iff \ln(y) = -3t + c$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-3t+c} = e^{-3t} \cdot e^{c} = Ae^{-3t} \qquad y(0) \overset{!}{=} 5 \Rightarrow 5 = Ae^{-3\cdot 0} = A \Rightarrow y(t) = 5e^{-3t}$$

b) Zu welcher Zeit t^* erreicht y den Wert $y(t^*) = 1$?

$$y(t^*) \overset{!}{=} 1 \Rightarrow 1 = 5e^{-3t^*} \iff \frac{1}{5} = e^{-3t^*} \iff \ln(1/5) = -3t^* \iff t^* = \frac{\ln(5)}{3}$$

⑤ Lösen Sie die DGL $y'(t) = ky^2$ mit $y(0) = y_0 > 0$ und $k > 0$ durch Separation der Variablen. Wie verhält sich die Lösung für ein $t^* = \frac{1}{ky_0}$?

$$\frac{dy}{dt} = ky^2 \iff \frac{dy}{y^2} = k\,dt \iff \int \frac{dy}{y^2} = k \int dt \iff -\frac{1}{y} = kt + c \iff y(t) = \frac{1}{-kt - c}$$

$$y(0) = \frac{1}{-k\cdot 0 - c} \overset{!}{=} y_0 \iff -\frac{1}{c} = y_0 \iff c = -\frac{1}{y_0} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{-kt + \frac{1}{y_0}} = \frac{y_0}{1 - ky_0 t}$$

$$y\left(t = \frac{1}{ky_0}\right) = \frac{y_0}{1 - ky_0 \frac{1}{ky_0}} = \frac{y_0}{1-1} = \frac{1}{0} \longrightarrow \infty$$ Es divergiert.

⑥ Eine Grösse $N(t)$ erfülle die DGL $N'(t) = a - bN(t)$ mit Konstanten $a, b > 0$ und Anfangsbedingung $N(0) = 0$. Es wird behauptet, dass $N(t) = \frac{a}{b}(1 - e^{-bt})$ die Lösung ist. Verifizieren Sie die Behauptung explizit durch Einsetzen in die DGL und Überprüfen der Anfangsbedingung. Was bedeutet die Lösung physikalisch (Grenzwert $t \to \infty$)

$$N(0) = \frac{a}{b}(1 - e^{-b\cdot 0}) = \frac{a}{b}(1-1) = 0 \checkmark \qquad \lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{a}{b}(1 - \underbrace{e^{-bt}}_{\to 0}) = \frac{a}{b}$$ stationärer Zustand

$$\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{a}{b}(1 - e^{-bt})\right] = \frac{a}{b}\frac{d}{dt}\left[\underbrace{1}_{\to 0} - e^{-bt}\right] = -\frac{a}{b}(-b)\cdot e^{-bt} = ae^{-bt}$$

$$N'(t) = a - bN(t) \Rightarrow ae^{-bt} = a - \cancel{b}\left(\frac{a}{\cancel{b}}(1 - e^{-bt})\right) = \cancel{a} - \cancel{a} + ae^{-bt} = ae^{-bt} \checkmark$$

Euler Ansatz Homogene, lineare DGLs höherer Ordnung lassen sich systematisch über den Euler-Ansatz lösen. Dafür definieren wir das charakteristische Polynom $\chi(\lambda)$, bei den $y^{(n)}(x)$ mit λ^n ersetzt wird. Dessen Nullstellen sind dann die Fundamentallösungen der DGL.

Dieser Ansatz basiert darauf, dass e-Funktionen grundsätzlich Lösungen von DGLs mit konst. Koffzienten sind.

$$x(t) = e^{\lambda t} \qquad \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \qquad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

1.) Charakteristisches Polynom aufstellen

2.) Nullstellen des char. Polynoms finden

a) Unterschiedliche reelle Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} + Ce^{\lambda_3 x}$$

b) Mehrfache Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

$$y(x) = x^0 Ae^{\lambda x} + x^1 Be^{\lambda x} + x^2 Ce^{\lambda x}$$

c) Komplexe Nullstellen $\lambda = a \pm ib$

$$y(x) = Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx)$$

3.) $y(x) =$ Summe der Fundamentallösungen

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 \overset{!}{=} 0$$

Polynomdivision: $\lambda_1 = 1$ (geraten)

$$(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$\begin{aligned} &-(\lambda^3 - \lambda^2) \\ &\overline{\quad -\lambda^2 - \lambda + 2} \\ &\quad -(-\lambda^2 + \lambda) \\ &\quad \overline{\quad -2\lambda + 2} \end{aligned}$$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = -1$

$\Uparrow$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 2}$$

$$y(x) = Ae^x + Be^{2x} + Ce^{-x}$$

⑦ Gegeben sei die DGL $y''(x) + k^2 y(x) = 0$ mit $k \in \mathbb{R}^+$. Wir suchen Lösungen mit dem Euler-Ansatz.

a) Leiten Sie das charakteristische Polynom her und bestimmen Sie beide Werte von λ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0 \Rightarrow \chi(\lambda) = \lambda^2 + k^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = \pm ik$$

b) Geben Sie die allgemeine Lösung in cos und sin Form an.

$$y(x) = Ae^{ax}\cos(bx) + Be^{ax}\sin(bx) = Ae^{0x}\cos(kx) + Be^{0x}\sin(kx) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$$

c) Geben Sie die allgemeine Lösung als Linearkombination der beiden Fundamentallösungen in Exponentialform an.

$$y(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$$

d) Schreiben Sie mit Hilfe der Euler-Formel $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ die Exponentialform auf die reelle Form $y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$ um.

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} \\ &= C_1(\cos(kx) + i\sin(kx)) + C_2(\cos(kx) - i\sin(kx)) \\ &= (C_1 + C_2)\cos(kx) + (C_1 - C_2)i\sin(kx) \\ &= A\cos(kx) + B\sin(kx) \end{aligned}$$

$| \; e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$

$| \; A := C_1 + C_2$

$\quad B := i(C_1 - C_2)$

e) Welche Werte von k sind erlaubt, wenn die Lösung die Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y(L) = 0$ erfüllen muss.

$$y(0) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 0 = A\underbrace{\cos(k\cdot 0)}_{1} + B\underbrace{\sin(k\cdot 0)}_{0} = A = 0$$

$$y(L) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 0 = B\sin(kL) \Rightarrow B \neq 0 \text{ (sonst triviale Lsg.)}$$

$$\Rightarrow \sin(kL) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow kL = n\pi \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow y(x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)$$

(8) Betrachten Sie die komplexwertige Funktion $f(t) = e^{i\omega t}$ $\omega \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen sie $f'(t)$ und zeigen Sie, dass f die DGL $f' = i\omega f$ löst.

$$f(t) = e^{i\omega t} \qquad \frac{df}{dt} = i\omega e^{i\omega t} = i\omega f \quad \checkmark$$

b) Sei nun $g(x,t) = h(x) e^{-i\omega t}$ mit reellwertiger Funktion $h(x)$. Berechnen Sie $|g(x,t)|^2$ und zeigen Sie dass dieser Ausdruck unabhängig von t ist.

$$|g(x,t)|^2 = g^*(x,t)\, g(x,t) = h(x)\, e^{i\omega t} \cdot h(x)\, e^{-i\omega t} = h^2(x) \cdot e^{i\omega t - i\omega t} = h^2(x) = |h(x)|^2$$

Klassische Mechanik

In der Regel vereinfachen wir die Mechanik von Körpern, indem wir sie als sich bewegende Massenpunkte verstehen. Da die drei Bewegungen in den drei kartesischen Koordinaten unabhängig von einander betrachtet werden können, stellen wir den Ort $\vec{r}$, die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und die Beschleunigung $\vec{a}$ mit Vektoren aus.

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} \qquad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix}$$

Wir unterscheiden zwischen zwei Bewegungen, die recht leicht zu berechnen sind.

Gleichförmig, geradlinige Bewegung: $\vec{v} = \text{konst.} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ $\qquad \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t - t_0)$

Gleichmässig beschleunigte Bewegung: $\vec{a} = \text{konst} \Rightarrow \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$ $\qquad \begin{cases} \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t-t_0) \\ \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2 \end{cases}$

Die drei Newton'schen Axiome:

1. Axiom: *Trägheit: Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder gleichförmig geradliniger Bewegung, solange keine Kräfte auf ihn wirken.*

2. Axiom: *Aktionsprinzip: Eine Änderung des Impulses eines Massenpunkts wird durch eine Kraft verursacht, sodass die Kraft proportional zu Massen und Beschleunigung ist.*

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \qquad \mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1.10}$$

Kräfte addieren sich vektoriell zur Totalkraft gemäss *Superpositionsprinzip*:

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \sum_i \mathbf{F}_i \tag{1.11}$$

3. Axiom: *Reaktionsprinzip: Wenn zwei Körper miteinander wechselwirken, so hat jede Kraft die von A auf B wirkt* $\mathbf{F}_{\text{AB}}$ *eine gleichgrosse aber entgegengesetze Gegenkraft* $\mathbf{F}_{\text{BA}}$

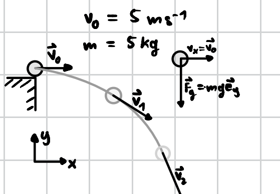
$$\mathbf{F}_{\text{AB}} = -\mathbf{F}_{\text{BA}} \tag{1.12}$$

Reibungskraft	$\lvert\mathbf{F}_{\text{R}}\rvert = \mu\lvert\mathbf{F}_{\text{N}}\rvert$
Normalkraft	*wirkt senkrecht auf Oberfläche*
Gravitation	$\mathbf{F}_{\text{G}} = -\Gamma\frac{m_1 m_2}{\lvert\mathbf{r}\rvert^2}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$
Gewichtskraft	$\mathbf{F}_{\text{g}} = -mg\hat{\mathbf{e}}_z$
Federkraft	$\mathbf{F}_{\text{F}} = -k\Delta x$
Zentripetalkraft	$\mathbf{F}_{\text{ZP}} = \frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{e}}_r$
Lorentzkraft	$\mathbf{F}_{\text{L}} = -q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$
Coulombkraft	$\mathbf{F}_{\text{C}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{\lvert\mathbf{r}\rvert^2}\hat{\mathbf{e}}_r$
Elektrische Kraft	$\mathbf{F}_{\text{el}} = q\lvert\mathbf{E}\rvert$
Luftwiderstand	$\mathbf{F}_{\text{W}} = -\frac{1}{2}pc_{\text{w}}A\mathbf{v}^2\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{v}}$

Der Impuls $\vec{p}$ eines Körpers ist für gleichförmige geradlinige Bewegungen (Bewegungen ohne äussere Kraft) eine Erhaltungsgrösse, weswegen der Gesamtimpuls erhalten bleibt.

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad E_{kin} = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$$

(9) Bei einem waagerechten Wurf hat ein Ball der Masse $m = 5\,\text{kg}$ eine Anfangsgeschwindigkeit in x-Richtung von $v_0 = 5\,\frac{m}{s}$ und keine in y-Richtung. Nehme für die Gravitationskonstante $g = 9.81\,\frac{m}{s^2} \approx 10\,\frac{m}{s^2}$ an.



a) Stelle die drei Vektoren $\vec{r}, \vec{v}$ und $\vec{a}$ für den Zeitpunkt t_1 auf.

$$\vec{r}(t=0) = \begin{bmatrix} x(t=0) \\ y(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}(t=0) = \begin{bmatrix} v_x(t=0) \\ v_y(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{a}(t=0) = \begin{bmatrix} a_x(t=0) \\ a_y(t=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

b) Stelle die drei Vektoren $\vec{r}, \vec{v}$ und $\vec{a}$ für den Zeitpunkt t_2 auf.

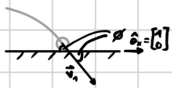
$$\vec{r}(t=t_1) = \begin{bmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 t_1 \\ -\frac{1}{2} g t_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\,ms^{-1} \cdot 2s \\ -\frac{1}{2} \cdot 10\,ms^{-2} (2s)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\,m \\ -20\,m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -20 \end{bmatrix} m$$

$$\vec{v}(t=t_1) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_{y,0} + at \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ -g t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\,ms^{-1} \\ -10\,ms^{-2} \cdot 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\,ms^{-1} \\ -20\,ms^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -20 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

$$\vec{a}(t=t_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10\,ms^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

c) Welche totale Geschwindigkeit hat der Ball bei t_1 und unter welchem Winkel würde auf eine Oberfläche einschlagen.

$$|\vec{v}(t_1)| = \left| \begin{bmatrix} 5 \\ -20 \end{bmatrix} \frac{m}{s} \right| = \sqrt{5^2 + (-20)^2} = \sqrt{425}\,\frac{m}{s} = 20.6\,\frac{m}{s}$$



$$\cos(\varnothing) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \hat{e}_x|}{|\vec{v}_1| \cdot |\hat{e}_x|} = \frac{1}{1 \cdot 20.6 \frac{m}{s}} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{m}{s} = \frac{5}{20.6} \approx \frac{1}{4} \qquad \varnothing = \arccos(1/4) = 0.97\ \text{rad}$$

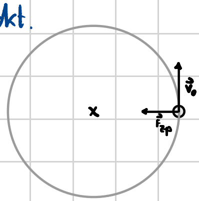
d) Welche Kraft wirkt auf den Ball?

$$\vec{F} = m\vec{a} = -mg\hat{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5\,kg \cdot 10\,ms^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \end{bmatrix} kg\,ms^{-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \end{bmatrix} N$$

e) Berechne den Impuls $\vec{p}$ des Balles (zeitabhängig in y-Richtung)

$$\vec{p} = m\vec{v} = m \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} v_0 \\ at \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mv_0 \\ -mgt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\,kg \cdot 5\,ms^{-1} \\ -5\,kg \cdot 10\,ms^{-2} \cdot t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25\ kg\,ms^{-1} \\ -50\ N \cdot t \end{bmatrix}$$

Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung bewegt sich ein Körper mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag $|\vec{v}|$ auf einer Kreisbahn. Damit er das tut muss eine konstante Kraft $\vec{F}_{ZP}$, die Zentripetalkraft, auf den Körper wirken, welche diesen in den Kreismittelpunkt drückt.

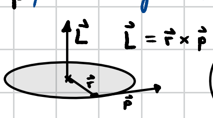


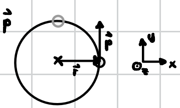
$$\vec{F}_{ZP} = \frac{m|\vec{v}|^2}{|\vec{r}|} \hat{e}_r$$

Bsp.: Welche Kraft muss ein Seil der Länge $l = 1m$ aushalten, um eine Kugel von $m = 5kg$ und der Geschwindigkeit $v = 5\,ms^{-1}$ auf einer stabilen Kreisbahn zu halten?

$$|\vec{F}_{ZP}| = \frac{mv^2}{l} = \frac{5\,kg \cdot (5\,ms^{-1})^2}{1\,m} = 125\ N$$

Der Drehimpuls $\vec{L}$ einer Kreisbewegung ist das rotatorische Äquivalent des linearen Impulses $\vec{p}$, und zeigt vektoriell senkrecht auf die Kreisscheibe der Rotation.





$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m \qquad \vec{p} = m\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} Ns \qquad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{kg\,m^2}{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix} \frac{kg\,m^2}{s}$$

Energieerhaltung

In der Physik können wir Probleme mit zwei Ansätzen lösen, dem energetischen Ansatz und dem Bewegungsgleichungsansatz. Letzerer haben wir uns gerade oben angeschaut und ersterer ist einfacher und wird immer dann verwendet, wenn man nur an Anfangs- und Endinformationen interessiert ist.

Die mechanische Energie E_{mech} bleibt erhalten. Das heisst, dass der Betrag von E_{mech} am Anfang und am Ende gleich bleiben muss.

$$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Bsp.: Wie schnell ist ein Ball, der 2m tief fällt?

$$E_{mech,1} = E_{mech,2} \iff \frac{1}{2}m\cancel{v_0^2}^{0} + mg\cancel{h_0}^{0} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 \implies v_1 = \sqrt{\frac{2\cancel{m}gh}{\cancel{m}}} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 2m} = 6.26 \frac{m}{s}$$

10 Ein Heliumatom (Masse $m_A = 4u$) bewegt sich entlang der x-Achse mit Geschwindigkeit $v_A = 1500\ ms^{-1}$ und trifft auf ein ruhendes Argon-Atom (Masse $m_B = 40u$). Der Stoss ist vollkommen elastisch und eindimensional.

a) Berechnen Sie den Anfangsimpuls und die anfängliche kinetische Energie des Systems.

$$p_0 = m_A v_A = 4 \cdot (1.661 \times 10^{-27} kg) \cdot (1500\ ms^{-1}) = 9.97 \times 10^{-24}\ Ns$$
$$E_0 = \frac{1}{2} m_A v_A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (1.661 \times 10^{-27} kg) \cdot (1500\ ms^{-1})^2 = 7.47 \times 10^{-21}\ J = 0.047\ eV$$

b) Stellen Sie die Erhaltungssätze für Impuls und kinetische Energie auf mit den Unbekannten v_A' und v_B' (Geschwindigkeiten nach dem Stoss)

Impulserhaltung: $m_A v_A = m_A' v_A' + m_B' v_B'$ (1)

Energieerhaltung: $\frac{1}{2} m_A v_A^2 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2 + \frac{1}{2} m_B v_B'^2$ (2)

c) Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie v_A' und v_B'.

(1) $m_A(v_A - v_A') = m_B v_B'$

(2) $m_A(v_A - v_A')(v_A + v_A') = m_B v_B'^2$

$$v_A' = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A = -1227 \frac{m}{s}$$
$$v_B' = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A = 273 \frac{m}{s}$$

d) In welche Richtung bewegt sich Atom A nach dem Stoss. Diskutieren Sie qualitativ die Grenzfälle $m_A = m_B$ und $m_A \ll m_B$.

$v_A' < 0 \implies$ Atom A wird zurückgeworfen

$m_A = m_B \implies v_A' = 0 \quad v_B' = v_A$

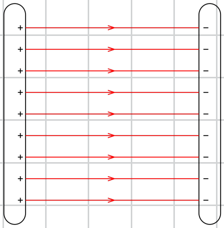
$m_A \ll m_B \implies v_A' \approx -v_A \quad v_B' \approx 0$ (fast reflektiert)

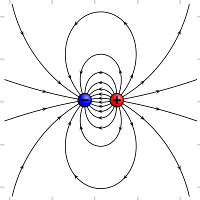
Elektrische und Magnetfelder

Elektrische Ladungen können sich anziehen bzw. abstossen und diese Kraft nennt man Coulombkraft. Damit haben sie auch ein elektrisches Potenzial

$$\vec{F}_{el} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} \qquad E_{pot} = U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

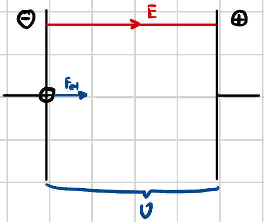
Ein elektrisches Feld E wird durch Ladungen gebildet, bspw. durch zwei geladene Platten (Plattenkondensator). Wird eine Ladung in dieses Feld gelegt wirkt eine Kraft $\vec{F}_{el}$ auf die Ladung, die die Ladung an den gegensätzlichen Pol beschleunigt.





- $\vec{F}_{el}$ wirkt tangential zu den Feldlinien
- Feldlinien gehen von ⊕ nach ⊖
- Wenn $\vec{E}$ überall gleich ist, ist das Feld homogen
- Plattenkondensator: $E = \frac{U}{d} \Rightarrow U = U_{kath.} - U_{an.}$

Wenn wir die Beschleunigung eines Elektrons im Plattenkondensator berechnen wollen, eignet sich der energetische Ansatz.



- Anfangs befindet sich ein e^- in der ⊖-Platte ⇒ wird zu ⊕ beschl.
  - ↳ $E_{kin,1} = 0$, da das e^- anfangs in Ruhe ist
  - ↳ $E_{pot,2} = 0$, da mit dem Auftreffen des e^- auf ⊕-Platte wurde das gesamte el. Potenzial durchlaufen.

$$E_{mech,1} = E_{mech,2} \Leftrightarrow \cancel{E_{kin,1}}^{0} + E_{pot,1} = E_{kin,2} + \cancel{E_{pot,2}}^{0} \Leftrightarrow qU = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

11 Ein Elektron wird aus der Ruhe heraus durch eine Spannung $U = 1000\,V$ beschleunigt.

a) Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit des Elektrons (nicht-relativistisch).

$$eU = \frac{1}{2}m_e v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1.602\times10^{-19}\,As\cdot 1000\,V}{9.109\cdot10^{-31}\,kg}} = 1.88\times10^{7}\,m\,s^{-1}$$

b) Berechnen Sie die kinetische Energie in eV und Joule.

$$E_{kin} = eU = 1000\,eV = 1.602\times10^{-16}\,J$$

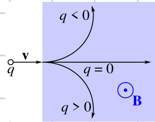
12 Im NaCl-Kristall haben die $Na^{\oplus}$- und $Cl^{\ominus}$-Ionen einen Abstand von $r = 282\,pm$.

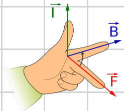
a) Berechnen Sie die elektrostatische Energie eines einzelnen Ionenpaares in J und in eV.

$$E_{el} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1.602\times10^{-19}\,As)^2}{2.82\times10^{-10}\,m} = -8.18\times10^{-19}\,J = -5.11\,eV$$

Ein Magnetfeld $\vec{B}$ wird durch ströme induziert (bspw. Spulen). Bewegt sich eine Ladung im Magnetfeld wirkt die Lorentzkraft $\vec{F}_L$ auf die Ladung senkrecht zur Bewegungsrichtung.

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$$



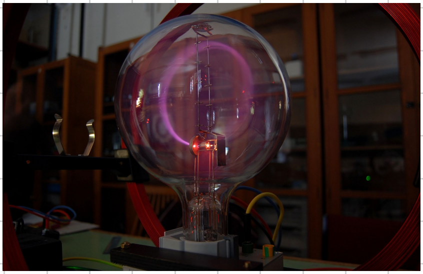


linke Hand: ⊖

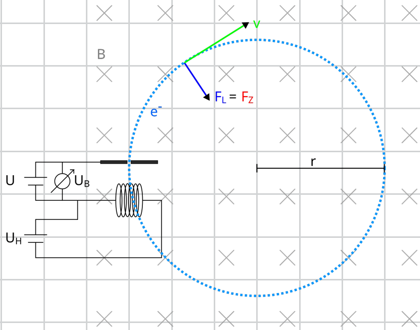
rechte Hand: ⊕

Bsp.: Fadenstrahlrohr

Beim Fadenstrahlrohr werden Elektronen zuerst in einem elektrischen Feld beschleunigt und dann in ein Magnetfeld geleitet. Das Magnetfeld wird als homogen betrachtet und die Magnetfeldlinien stehen senkrecht zur Geschwindigkeit. Somit wirkt immer senkrecht zur Bewegungsrichtung die Lorentzkraft, gemäss der Rechten-Hand-Regel (links für ⊖).



$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}\,, \quad \vec{v} \perp \vec{B} \quad \Rightarrow \quad F_L = qvB$$



Kraft wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung ergibt eine Kreisbewegung.

$$F_{ZP} = \frac{mv^2}{r} \qquad F_{ZP} \overset{!}{=} F_L \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mv^{\cancel{2}}}{r} = q\cancel{v}B \quad \Leftrightarrow \quad \frac{q}{m} = \frac{v}{B \cdot r}$$

Die Geschwindigkeit lässt sich über Energieerhaltung berechnen, da die e^- in einem E-Feld beschleunigt werden.

$$E_{mech,1} = E_{mech,2} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\cancel{E_{kin,1}}}_{0} + E_{pot,1} = E_{kin,2} + \underbrace{\cancel{E_{pot,2}}}_{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = -qU \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

Wir setzen v in den vorherigen Ausdruck ein.

$$\frac{e}{m} = \frac{1}{Br} \cdot v = \frac{1}{Br}\sqrt{\frac{2mU}{e}} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{\cancel{2}}}{m^{\cancel{2}}} = \frac{1}{B^2r^2}\,\frac{2\cancel{m}U}{\cancel{e}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2r^2}}$$

Historisch konnte man mit dem Fadenstrahlrohr das Verhältnis $\frac{e}{m}$ für Elektronenen berechnen. Zusammen mit dem Milikan-Versuch, der die Elementar-ladung ermittelt liess sich die Elektronenmasse ermitteln.

(13) Ein Elektron mit kinetischer Energie $E_{kin} = 100\,eV$ tritt senkrecht in ein homogenes Magnetfeld der Stärke $B = 0.01\,T$ ein.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Elektrons (nicht relativistisch).

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \iff v = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.602 \times 10^{-17}\,J}{9.109 \times 10^{-31}\,m}} = 5.93 \times 10^6\,\frac{m}{s}$$

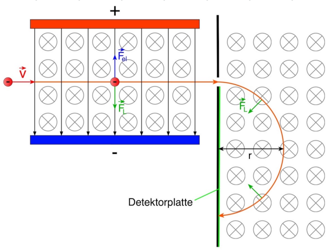
b) Berechnen Sie den Bahnradius r.

$$|\vec{F}_L| = |\vec{F}_{ZP}| \iff evB = m_e v^2 r^{-1} \iff r = \frac{m_e v}{eB} = \frac{9.109 \times 10^{-31}\,kg \cdot 5.93 \times 10^6\,ms^{-1}}{1.602 \times 10^{-19}\,As \cdot 0.01\,T} = 3.37\,mm$$

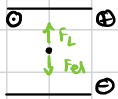
c) Berechnen Sie die Umlaufzeit T.

$$T = \frac{2\pi m_e}{eB} = 3.57\,ns$$

(14) Ein Massenspektrometer kombiniert zwei Stufen: einen Wienfilter (Geschwindigkeitsselektor mit gekreuztem elek. Feld $\vec{E}$ und magnetischen Feld $\vec{B}_1$, beide senkrecht zur Flugrichtung) und ein nachgeschaltetes Sektor-Magnetfeld $\vec{B}_2$. Im Wienfilter wirken auf jedes Ion gleichzeitig die elektische Kraft $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$ und die magnetische Lorentzkraft $\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B}_1)$, die sich im idealen Fall gerade aufheben. Im Sektorfeld $\vec{B}_2$ wirkt ausschliesslich nur die Lorentzkraft und das Ion beschreibt eine Kreisbahn bis zum Detektor.



a) Leiten Sie die Bedingung an die Geschwindigkeit v her, mit der ein einfach positiv geladenes Teilchen den Wienfilter unabgelenkt durchquert.



$$|\vec{F}_{el}| \stackrel{!}{=} |\vec{F}_L| \Rightarrow \cancel{q}E = \cancel{q}vB \Rightarrow v = \frac{E}{B} = \frac{U}{dB}$$

b) Berechnen Sie die selektierte Geschwindigkeit für $E = 2.0 \times 10^4\,\frac{V}{m}$ und $B_1 = 0.10\,T$.

$$v = \frac{E}{B} = \frac{2.0 \times 10^4\,V\,m^{-1}}{0.1\,T} = 2.0 \times 10^5\,\frac{m}{s}$$

c) Leiten Sie im Sektorfeld B_2 die Beziehung zwischen Bahnradius r, Masse m und Geschwindigkeit v her.

$$|\vec{F}_L| = |\vec{F}_{ZP}| \iff \vec{v} \perp \vec{B}_2 \quad qvB_2 = \frac{mv^2}{r} \iff r = \frac{mv}{qB_2}$$

d) Ein Gemisch aus $^{20}Ne^{\oplus}$ und $^{22}Ne^{\oplus}$ durchläuft den Filter und tritt anschliessend in das Sektorfeld $B_2 = 0.5\,T$ ein. Berechnen Sie die Bahnradien mit $m_{^{20}Ne} = 19.99\,u$ und $m_{^{22}Ne} = 21.99\,u$.

$^{20}Ne^{\oplus}$: $r = \frac{mv}{qB_2} = \frac{19.99\,u \cdot 2.0\times10^5\,ms^{-1}}{1.602\times10^{-19}\,C \cdot 0.5\,T} = 8.29\,cm$

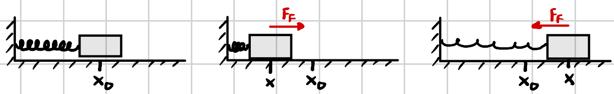
$^{22}Ne^{\oplus}$: $r = \frac{mv}{qB_2} = \frac{21.99\,u \cdot 2.0\times10^5\,ms^{-1}}{1.602\times10^{-19}\,C \cdot 0.5\,T} = 9.12\,cm$

e) Bei einem 180°-Sektor (Halbkreisbahn) treten die beiden Ionenpaare am Detektor in unterschiedlichem Abstand vom Eintrittspunkt auf. Welchen räumlichen Unterschied muss der Detektor mindestens auflösen.

$$\Delta s = 2(r_{22} - r_{20}) = 2 \cdot 0.83\,cm = 1.7\,cm$$

Schwingungen und harmonischer Oszillator

Der harmonische Oszillator ist ein idealisiertes Modell der klassischen Physik, welches wir häufig nutzen um Bindungsschwingungen in Molekülen zu erklären. Eine Masse m ist an einer Feder befestigt und oszilliert reibungsfrei nach einer Auslenkung aus der Gleichgewichtslage, auf Grund der rückstellenden Kraft $\vec{F}_F$ nach dem Hook'schen Gesetz.



$F_F = -kx$ $\quad k \equiv$ Kraftkonstante Feder

Bewegungsgleichung: $F = m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \omega^2 \equiv \frac{k}{m} \qquad \frac{d^2x}{dt} + \omega^2 x = 0$

Charakteristisches Polynom: $\chi(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2 \overset{!}{=} \quad \lambda = \pm i\omega \qquad x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

Kreisfrequenz

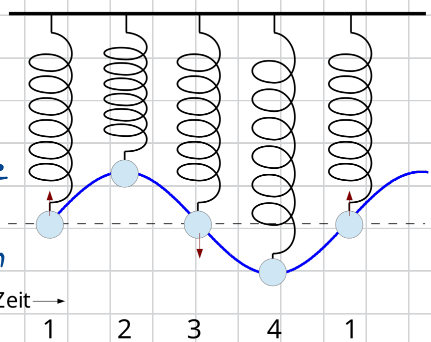
Amplitude

Anfangsbedingung: $x(t=0) = x_0 \qquad x(0) = A\cancel{\cos}^{1}(0) + B\cancel{\sin}^{0}(0) = A \overset{!}{=} x_0 \qquad x(t) = x_0 + B\sin(\omega t)$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\nu$ — Kreisfrequenz

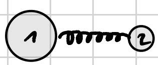
$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\nu$ — Periode

$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ — Frequenz



Die reduzierte Masse μ ist ein Trick, um ein Zwei-Körper-Problem so zu behandeln, als würde ein Teilchen mit der Masse μ sich in einem Kraftfeld bewegen. So kann man zwei Massen verbunden mit einer Feder beschreiben.

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$



$\mu\ddot{x} = -kx \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad \omega_0 = 2\pi c\,\omega_e$

(15) Ein Körper der Masse $m = 0.50\,kg$ ist an einer horizontalen Feder befestigt. Die Federkonstante beträgt $D = 200\,N/m$. Reibung wird vernachlässigt. Der Körper wird aus der Ruhelage um $A = 5.0\,cm$ ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t=0$ losgelassen.

a) Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω, die Frequenz und die Periodendauer T

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\ N/m}{0.50\ kg}} = 20\ s^{-1}$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20 s^{-1}} = 0.314 s$ $f = \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{0.314 s} = 3.18\ Hz$

b) Geben Sie die Auslenkung $x(t)$ als Funktion der Zeit an.

$x(t) = A\cos(\omega t) = 5.0 \cos(20 s^{-1} t)\ cm$

c) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit v_{max} des Körpers

$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t)$ => max bei $\sin = \pm 1$ => $v_{max} = A\omega = 1 \frac{m}{s}$

d) Berechnen Sie die maximale Beschleunigung a_{max}

$a(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t)$ => max bei $\cos = \pm 1$ => $a_{max} = A\omega^2 = 20 \frac{m}{s^2}$

e) Bestimmen Sie die Gesamtenergie der Schwingung

Allg. Feder: $E_{ges} = \frac{1}{2} k A^2 = 0.25\ J$

(16) Das HCl-Molekül hat eine harmonische Schwingungswellenzahl von $\omega_e = 2991\ cm^{-1}$. Berechnen Sie die zugehörige klassische Schwingungsperiode T in Femtosekunden.

$\omega = 2\pi c_0 \omega_e = 5.633 \times 10^{14}\ s^{-1}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.115 \times 10^{-14}\ s = 11.2\ fs$

(17) Berechnen Sie die reduzierte Masse μ für die Isotopomere $H^{35}Cl$, $D^{35}Cl$ und $T^{35}Cl$. Verwenden Sie $m_H = 1.008\ u$, $m_D = 2.014\ u$, $m_T = 3.016\ u$ und $m_{35Cl} = 34.969\ u$

$\mu_{HCl} = \frac{m_H m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}} = 0.9797\ u$

$\mu_{DCl} = \frac{m_H m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}} = 1.9043\ u$

$\mu_{TCl} = \frac{m_H m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}} = 2.7763\ u$